



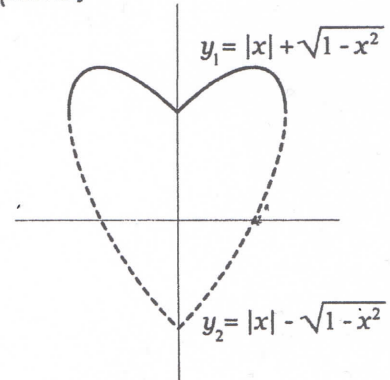
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξετάσεις Ιουνίου 2018

1. Έφτασε η ημέρα του Αγίου Βαλεντίνου και χρειάζεστε μια κάρτα για το έτερον σας ήμισυ! Έχοντας, όμως, ξοδέψει όλα τα λεφτά σας σε βιβλία(!) θα πρέπει να σχεδιάσετε μόνοι σας την κάρτα σε σχήμα καρδιάς. Αυτή η καρδιά αποτελείται από τις καμπύλες

$$y_1 = |x| + \sqrt{1-x^2} \quad (\text{συνεχής})$$

$$y_2 = |x| - \sqrt{1-x^2} \quad (\text{διακεκομμένη})$$



με  $-1 \leq x \leq 1$ , όπως και στο σχήμα. Η κάρτα είναι φτιαγμένη από λεπτό χαρτί σταθερής πυκνότητας  $\rho(x, y) = \rho_0$ .

- (α) Υπολογίστε τη μάζα και το κέντρο μάζας της κάρτας.  
(β) Βρείτε το μήκος της περιφέρειας της κάρτας σε μορφή ολοκληρώματος (μην υπολογίσετε το ολοκλήρωμα).
2. (α) Για δύο διανυσματικά πεδία  $\vec{f} = \vec{f}(t)$  και  $\vec{g} = \vec{g}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt}$  να δείξετε ότι  $\frac{d|\vec{f}|}{dt} = \frac{\vec{f} \cdot \vec{g}}{|\vec{f}|}$ .  
(β) Αν  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  η τροχιά ενός σωματιδίου,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ , τα αντίστοιχα πεδία ταχύτητας και επιτάχυνσης και  $s = |\vec{r}|$ , να δείξετε ότι:  $\frac{d|\vec{v}|}{ds} = \frac{s \vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}| \vec{r} \cdot \vec{v}}$ .
3. Έστω το πεδίο δυνάμεων:  $\vec{F} = \cos(x-2y)\vec{i} - 2\cos(x-2y)\vec{j}$ .  
(α) Δείξτε ότι είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού ώστε  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ .  
(β) Βρείτε δυο ανοιχτές καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  ώστε  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  και  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$ .
4. Θεωρήστε το μη-γραμμικό σύστημα: 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + hx(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + hy(x^2 + y^2) \end{cases}, \text{ όπου } h \in \mathbb{R}.$$
  
(α) Να δείξετε ότι το  $(0, 0)$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο του συστήματος.  
(β) Χαρακτηρίστε το σημείο ως προς την ευστάθειά του και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης του συστήματος όταν  $h = 0$ .  
(γ) Αν  $h \neq 0$  και  $r^2 = x^2 + y^2$  δείξτε ότι  $r \frac{dr}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$  και άρα  $\frac{dr}{dt} = hr^3$ .
5. (α) Η συνάρτηση Lagrange ενός μονοδιάστατου συστήματος είναι της μορφής  $L = L(x, \dot{x})$ , όπου  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ . Να δείξετε ότι η ποσότητα  $L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$  είναι μια σταθερή της κίνησης.  
(β) Φυσικό σύστημα περιγράφεται με τη μονοδιάστατη συνάρτηση Lagrange  $L = L(x, \dot{x}, t)$ . Ορίζουμε μια νέα συντεταγμένη  $q = f(x, t)$ , ώστε  $L(x, \dot{x}, t) = \tilde{L}(q, \dot{q}, t)$ . Να δείξετε ότι: 
$$\tilde{L} = \tilde{L}\left(f, \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}, t\right) \text{ και άρα } \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}.$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Όλα τα υποερωτήματα είναι ισοδύναμα με 1 μονάδα εκτός από το 1(α) που αντιστοιχεί σε 2 μονάδες. Για την επιτυχία του μαθήματος απαιτούνται 5 μονάδες.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**